Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Γραμμικη Αλγεβρα
Τέταρτο σετ Ασκήσεων

1. Η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ δίνεται, ως προς τις κανονικές βάσεις $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_4$, από τον πίνακα
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Βρείτε μία βάση του πυρήνα $\ker T$. Βρείτε επίσης υποχώρο $W \subset \mathbf{R}^4$ τέτοιον ώστε: $\ker T \oplus W = \mathbf{R}^4$.

   Bonus: Δείξτε ότι η T είναι 1:1 εάν την περιορίσουμε στον υποχώρο W.

2. Έχουμε γραμμικές απεικονίσεις
$$U^7 \xrightarrow{\mathrm{S}} V^3 \xrightarrow{\mathrm{T}} W^5,$$
όπου οι δείκτες δίνουν τις διαστάσεις των διανυσματικών χώρων.

   Εάν γνωρίζουμε ότι $\dim \operatorname{im}(T \circ S) = 3$, δείξτε ότι η T είναι 1:1 και η S είναι επί.

3. Δείξτε ότι τα διανύσματα $b_1 = (1, -3)$ και $b_2 = (2, 1)$ είναι βάση $\mathcal{B}$ του $\mathbf{R}^2$ και εκφράστε το διάνυσμα $u = (5, 2)$ ως γραμμικό συνδυασμό των b_1, b_2.

   Δίνεται επίσης η βάση $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ του $\mathbf{R}^3$, όπου $f_1 = (1, 1, 0), f_2 = (0, 1, 0)$ και $f_3 = (0, 0, 2)$. Δώστε τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ που ικανοποιεί:
$$T(b_1) = (1, 2, 3), \quad T(b_2) = (0, 3, 4)$$
ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}, \mathcal{F}$.

   Βρείτε τέλος τον πίνακα της T ως προς τις κανονικές βάσεις $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$.

ΕΚ, 1-11-14