Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Γραμμικη Αλγεβρα
Τρίτο σετ Ασκήσεων

1. (α′) Δείξτε ότι τα πολυώνυμα $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ $(n > 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στο Δ.Χ. $P(x)$ όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές. Επομένως δείξτε ότι αποτελούν βάση του υποχώρου $P_n(x)$ πολυωνύμων βαθμού το πολύ n και δώστε τη διάσταση του $P_n(x)$.

   Δώστε ισομορφισμό του χώρου $P_n(x)$ με πραγματικό Δ.Χ. ίδιας διάστασης, δίνοντας εικόνες των παραπάνω πολυωνύμων.

   (β′) Δείξτε ότι τα πολυώνυμα $\{1+x, 1+x^2, 2x-x^3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Ανήκει το πολυώνυμο $1 - 2x + x^2 + x^3$ στο ανάπτυγμά τους; Εάν ναι, εκφράστε το ως γραμμικό συνδυασμό τους.

2. Έστω W μη-κενός, γνήσιος υποχώρος του Δ.Χ. V, με $\dim V = n > 1$. Εάν $\{b_1, \ldots, b_k\}$ είναι βάση του W, θεωρούμε επέκτασή της σε βάση του V:

$$\{b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n\}.$$

   Εάν $U = \operatorname{span}(b_{k+1}, \ldots, b_n)$, δείξτε ότι $V = W \oplus U$ (ευθύ άθορισμα.)

3. Δίνεται ο υποχώρος

$$W = \operatorname{span}((1, 1, 0, 0)) \subset \mathbb{R}^4.$$

   Είναι δυνατόν να βρεθούν υποχώροι W_1, W_2 του $\mathbb{R}^4$ τέτοιοι ώστε:

   (α′) Να έχουμε ευθέα αθροίσματα $W \oplus W_1 = \mathbb{R}^4$ και $W \oplus W_2 = \mathbb{R}^4$ και

   (β′) Να έχουν τετριμμένη τομή: $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

   Εάν ναι, να βρεθούν κατάλληλοι W_1, W_2. Εάν όχι, εξηγήστε γιατί και βρείτε W_1, W_2 που να ικανοποιούν την πρώτη συνθήκη και να έχουν όσο το δυνατόν μικρότερη τομή.

4. Εάν $T : V \to U$ είναι γραμμική απεικόνιση και $W \subset V$ είναι υποχώρος τέτοιος ώστε η T να είναι 1:1 και επί στον W, δείξτε ότι $\dim V \geq \dim U$.

ΕΚ, 19-10-14
(Διόρθωση στην άσκηση 4, 27-11)