Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Εισαγωγη στην Αλγεβρα
Έκτο σετ Ασκήσεων

[Το σετ αυτό είναι πιό "πειραματικό" και σας ζητά να αναζητήσετε κανόνες σε ακολουθίες αριθμών που υπολογίσατε και να διατυπώσετε κάποιες " εικασίες"]

1. (α΄) Δείξτε ότι, εάν $\gcd(a, b) = d$, τότε το σύνολο των ακεραίων c για τους οποίους υπάρχουν ακέραιοι x, y με $xa + yb = c$ είναι το σύνολο των πολλαπλασίων του d.

   (β΄) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x, y) = |120x + 36y|$ για $(x, y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} - \{(0, 0)\}$ (πάνω στο πλέγμα των μη-μηδενικών ζευγών ακεραίων.) Βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης αυτής, καθώς και τις τιμές των (x, y) που δίνουν το ελάχιστο.

2. **Συνεχή κλάσματα (continued fractions):** Ο Ευκλείδειος αλγόριθμος συνδέεται άμεσα με τα λεγόμενα συνεχή κλάσματα, εκφράσεις της μορφής:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ldots}}$$

(πεπερασμένος ή άπειρος αριθμός.) Είναι πιό βολικό να γράψουμε το κλάσμα ως ακολουθία: $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$, με την προφανή αντιστοίχιση.

Για $a \geq b > 0$ φυσικούς, γράφουμε τα βήματα του Ευκλείδειου αλγορίθμου ως:

$$a = q_0 b + r_0 \longleftrightarrow \frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_0}{b} = q_0 + \frac{1}{b/r_0},$$

$$b = q_1 r_0 + r_1 \longleftrightarrow \frac{b}{r_0} = q_1 + \frac{r_1}{r_0} = q_1 + \frac{1}{r_0/r_1}$$

και ούτω καθεξής, οπότε ο λόγος a/b γράφεται ως συνεχές κλάσμα:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \ldots}},$$

όπου εμφανίζονται τα *πηλίκα* των διαιρέσεων.

Δείξτε ότι για οποιονδήποτε ρητό, το συνεχές κλάσμα είναι πεπερασμένο και δώστε την ακριβή τελική μορφή του.

Εφαρμόστε τη διαδικασία αυτή για το παράδειγμα που έχουμε κάνει: $a = 10672$ και $b = 4147$ (Απ: $[2; 1, 1, 2, 1, 9, 2]$).

Εάν σταματήσουμε σε κάποιο στάδιο (δηλαδή σε κάποιο $1/q_k$), τότε έχουμε ρητούς αριθμούς που λέγονται "προσεγγίσεις" (convergents) του αριθμού a/b. Δώστε την ακολουθία των προσεγγίσεων για το παραπάνω παράδειγμα. Πόσο ακριβείς είναι;

3. *(Συνέχεια)* Θα εξετάσουμε το (πολύ απλό!) *άπειρο* συνεχές κλάσμα

$$\phi = [1; 1, 1, 1, 1, 1, \ldots].$$

Υπολογίστε τις δέκα πρώτες ρητές προσεγγίσεις. Τί παρατηρείτε;

Οι προσεγγίσεις που βρήκαμε παράγονται και από έναν αναδρομικό τύπο: με $f_0 = 1, f_1 = 1$, θέτουμε

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \text{ για } \quad n \geq 2.$$

Παράγεται έτσι μιά ακολουθία ακεραίων, που λέγεται **ακολουθία Fibonacci**. Οι προσεγίσεις που βρήκαμε παραπάνω είναι οι λόγοι διαδοχικών όρων της ακολουθίας.

Δείξτε επαγωγικά από την αναδρομή ότι κάθε τρεις διαδοχικοί όροι f_n, f_{n+1}, f_{n+2} είναι σχετικά πρώτοι ανά δύο, δηλαδή $\gcd(f_n, f_{n+1}) = 1$ κλπ.

[Bonus: Μπορείτε να δώσετε την πλήρη απόδειξη ότι οι ρητές προσεγγίσεις του ϕ είναι όλες της μορφής f_{n+1}/f_n;]

Τέλος, δείξτε γιατί

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$$

και βρείτε από τον τύπο αυτόν την τιμή του ϕ (λέγεται ο χρυσός λόγος, golden ratio.)

ΕΚ, 16-11-2014