



ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Δεύτερο σετ Ασκήσεων

1. (α') Δείξτε ότι το σύνολο $M^{2 \times 2}$ πινάκων

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

με πραγματικά στοιχεία αποτελεί διανυσματικό χώρο.

- (β') Θεωρούμε το υποσύνολο $A \subset M^{2 \times 2}$ των πινάκων που έχουν μηδενικό **ίχνος** (όπου το *ίχνος* ορίζεται ως το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του πίνακα, δηλ. $a + d = 0$). Είναι το A υποχώρος του $M^{2 \times 2}$;

2. Δείξτε ότι, με W_1, W_2 υποχώρους ενός Δ.Χ. V , η ένωση $W_1 \cup W_2$ είναι υποχώρος εάν και μόνον εάν $W_1 \subset W_2$ ή $W_2 \subset W_1$.
3. Δείξτε ότι, εάν τα διανύσματα $\{u, v, w\}$ έχουν άνοιγμα/ανάπτυγμα W , τότε και τα $\{u + v, u - v, w\}$ έχουν το ίδιο άνοιγμα.
4. Σε έναν Δ.Χ. V έχουμε τρία μη-μηδενικά διανύσματα με $u + v + w = 0_V$. Αν $W_1 = \text{span}(u, v)$ και $W_2 = \text{span}(u, w)$, έχουμε απαραίτητα ότι $W_1 = W_2$;
5. Δείξτε ότι τα διανύσματα $(1, 1, 0)$, $(0, 2, 1)$ και $(1, 0, 1)$ αποτελούν βάση του χώρου \mathbb{R}^3 και επομένως εκφράστε το διάνυσμα $(2, 3, -2)$ ως γραμμικό συνδυασμό τους.
6. Για W_1, W_2 υποχώρους ενός Δ.Χ. V , δείξτε ότι

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Δώστε παραδείγματα όπου $\dim(W_1 + W_2) < \dim(W_1) + \dim(W_2)$.