



## ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ Τέταρτο σετ Ασκήσεων

1. Δώστε πλήρεις αποδείξεις για τα παρακάτω:

- (α') Η ένωση  $A \cup P$  αριθμήσιμου  $A$  και πεπερασμένου συνόλου  $P$  είναι αριθμήσιμη.  
(β') Αριθμήσιμη ένωση  $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i$  αριθμήσιμων συνόλων  $A_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  είναι αριθμήσιμη.

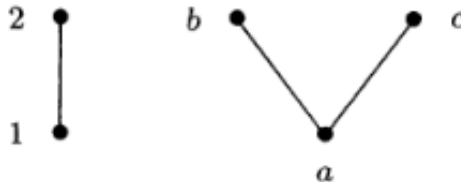
2. Σε σύνολα  $A, B$  έχουμε σχέσεις διάταξης, ας πούμε με συμβολισμούς  $\leq$  και  $\preceq$  αντίστοιχα. Ορίζουμε σχέση  $\mathcal{R}$  στο καρτεσιανό γινόμενο  $A \times B$  μέσω των δύο σχέσεων διάταξης ως εξής:

$$(a, b)\mathcal{R}(a', b') \iff a \leq a' \text{ και } b \preceq b'.$$

Δείξτε ότι η  $\mathcal{R}$  είναι σχέση διάταξης (λέγεται *διάταξη γινομένου*, *product order*).

Εάν  $C \subset A$ ,  $D \subset B$  είναι υποσύνολα και  $u_1, u_2$  άνω φράγματα των  $C, D$  για τις  $\leq$  και  $\preceq$  αντίστοιχα, είναι το  $(u_1, u_2)$  άνω φράγμα του  $C \times D$  για την  $\mathcal{R}$ ;

Ως απλό παράδειγμα, δώστε το διάγραμμα Hasse της  $\mathcal{R}$  για  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{a, b, c\}$  και διατάξεις που δίνονται από τα διαγράμματα Hasse:



Τέλος, αν  $A = B = \mathbf{R}$  και οι δύο διατάξεις είναι απλά η ίδια σχέση  $\leq$  "μικρότερο ή ίσο", βρείτε άνω φράγμα για το υποσύνολο  $\{x^2 + y^2 < 1\}$  στο  $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ . Ποιό είναι το ελάχιστο άνω φράγμα  $u$ ; (δηλαδή κάθε άλλο άνω φράγμα είναι "μεγαλύτερό του".)

3. Μία άλλη επιλογή σχέσης στο γινόμενο  $A \times A$  (με μία σχέση διάταξης στο  $A$ , την  $\leq$ ), είναι η *λεξικογραφική*:

$$(a, b)\mathcal{R}(a', b') \iff a \leq a' \text{ και αν } a = a', b \leq b'.$$

Δείξτε ότι έχουμε σχέση διάταξης και εξηγήστε πώς συνδέεται με τη διάταξη των λέξεων σε λεξικό.

Επαναλάβετε την εύρεση (ελαχίστου) άνω φράγματος στο  $\mathbf{R}^2$  για το μοναδιαίο δίσκο της προηγούμενης άσκησης.

ΕΚ, 24-10-2014