Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικησ
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Μαθηματικων

Εισαγωγη στην Αλγεβρα
Τρίτο σετ Ασκήσεων

1. Εάν $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ είναι σχέσεις ισοδυναμίας στο σύνολο A, ορίζουμε την **ένωση** $\mathcal{R}_u = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ και την **τομή** τους $\mathcal{R}_i = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ ως:

$$aR_u b \Leftrightarrow aR_1 b \text{ ή } aR_2 b,$$

$$aR_i b \Leftrightarrow aR_1 b \text{ και } aR_2 b.$$

   (α΄) Δείξτε ότι η $\mathcal{R}_i$ είναι σχέση ισοδυναμίας, αλλά η σχέση $\mathcal{R}_u$ δεν είναι Σ.Ι., γενικά.

   (β΄) Θυμίζουμε ότι οι Σ.Ι. είναι σε 1:1 αντιστοίχιση με διαμερισμούς του συνόλου όπου ορίζονται.

   Λέμε ότι ένας διαμερισμός είναι **εκλέπτυνση** (refinement) ενός άλλου εάν κάθε υποσύνολο του πρώτου είναι υποσύνολο κάποιου υποσυνόλου του δευτέρου (δηλαδή έχει σπάσει το σύνολο σε περισσότερα κομμάτια.) Τί μπορείτε να πείτε για το διαμερισμό της τομής R_u σε σχέση με τις R_1, R_2; Έχουμε εκλεπτύνσεις σε κάποια κατεύθυνση και πώς ακριβώς παράγονται;

   (γ΄) Βρείτε τις κλάσεις ισοδυναμίας στο $\mathbf{N}$ της τομής, εάν

$$aR_1 b \Leftrightarrow a \equiv b \mod 3,$$

$$aR_2 b \Leftrightarrow a \equiv b \mod 5.$$

2. Μία σχέση ισοδυναμίας σε ένα *πεπερασμένο* σύνολο μπορεί να ¨*παρασταθεί γραφικά*¨ με διάγραμμα πλέγματος στο επίπεδο, με ένα σημείο γιά κάθε ζεύγος της σχέσης. Με κατάλληλη αρίθμηση των στοιχείων, και χωρίς να χάσουμε γενικότητα, θεωρούμε ότι το σύνολο είναι κάποιο $\{1, 2, \ldots n\}$ και η σχέση είναι στο ακέραιο πλέγμα $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

   Η ερμηνεία της *ανακλαστικής* ιδιότητας είναι προφανής: η σχέση περιλαμβάνει όλα τα ¨διαγώνια¨ στοιχεία του πλέγματος. Δώστε ανάλογες ερμηνείες για τη **συμμετρική** και τη **μεταβατική** ιδιότητα.

   Με βάση τα παραπάνω, βρείτε τη σχέση ισοδυναμίας στο $\{1, 2, 3, 4\}$ η οποία περιλαμβάνει τα ζεύγη $1R1, 1R3$ και $4R2$ και δώστε το διάγραμμά της.

3. Ορίζουμε σχέση στο σύνολο των ευθειών στο επίπεδο: $\ell \sim \ell'$ εάν οι ευθείες είναι παράλληλες. Δείξτε ότι έχουμε σχέση ισοδυναμίας.

   Περιγράψτε έναν τρόπο να επιλέξουμε **αντιπρόσωπο** από κάθε κλάση ισοδυναμίας. Τί σύνολο παίρνουμε, γεωμετρικά. από τους αντιπροσώπους αυτούς;

4. Θεωρούμε γραμμική απεικόνιση του επιπέδου στο $\mathbf{R}$: $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} : (x, y) \mapsto ax + by$, με $(a, b) \neq (0, 0)$. Όπως έχουμε πει, έχουμε σχέση ισοδυναμίας στο πεδίο ορισμού $\mathbf{R}^2$ της f:
$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow f(x, y) = f(x', y').$$
Περιγράψτε τις κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης αυτής.

   Τέλος, θεωρώντας τις παραμέτρους a, b μεταβλητές, ορίζουμε σχέση στο $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$: $(a, b) \sim (a', b')$ εάν οι παραπάνω γραμμικές απεικονίσεις με τις τιμές αυτές των παραμέτρων έχουν τον ίδιο πυρήνα. Δείξτε ότι ορίζεται Σ.Ι. και βρείτε τις κλάσεις ισοδυναμίας.

5. Πόσους διαφορετικούς διαμερισμούς (και επομένως Σ.Ι.) έχουμε σε ένα σύνολο με **τέσσερα** στοιχεία; *(Ίσως σας βοηθήσει να θεωρήσετε το σύνολο ως τις ακμές ενός τετραγώνου.)*

   Bonus: Πόσες από αυτές τις σχέσεις ισοδυναμίας είναι πραγματικά διαφορετικές, εάν δεν θεωρήσουμε διαφορετικές δύο σχέσεις όπου η μία δίνει την άλλη με απλή αναδιάταξη των στοιχείων του συνόλου;

ΕΚ, 19-10-2014