



ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ Δεύτερο σετ Ασκήσεων

1. Δίνεται συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ και υποσύνολα A_1, A_2 του A και B_1, B_2 του B . Εξετάστε, με χρήση κατάλληλων σχημάτων και παραδειγμάτων, τί σχέση υπάρχει μεταξύ κάθε παρακάτω ζεύγους συνόλων:

$$\begin{array}{ll} f(A_1 \cap A_2) & \text{και} \quad f(A_1) \cap f(A_2) \\ f(A_1 \cup A_2) & \text{και} \quad f(A_1) \cup f(A_2) \\ f^{-1}(B_1 \cap B_2) & \text{και} \quad f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \\ f^{-1}(B_1 \cup B_2) & \text{και} \quad f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \end{array}$$

Δώστε προσεκτικά τις αποδείξεις.

2. Δίνονται συναρτήσεις $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow C$. Εάν η σύνθετη συνάρτηση $g \circ f$ είναι **1:1**, συνεπάγεται ή όχι ότι και η f και η g είναι **1:1**; Και εάν η σύνθεση είναι **επί**, πρέπει και η f και η g να είναι **επί**;
3. Δώστε την *εικόνα* των συναρτήσεων:

$$f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto f(x) = x \sin(x), \quad g : [-2, 2] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto g(x) = x^3 - 4x.$$

Είναι 1:1 η f ή η g ; Είναι επί; Περιορίζοντας κατάλληλα τα πεδία ορισμού και τιμών της g , δώστε μία συνάρτηση η οποία να είναι 1:1 και επί.

4. Να εξεταστεί αν οι παρακάτω σχέσεις \mathcal{R} είναι α) ανακλαστικές β) συμμετρικές, γ) μεταβατικές. Δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα.

(α') $aRb \Leftrightarrow a|b$ στο σύνολο \mathbf{N} ($a|b$ σημαίνει ο a διαιρεί τον b .)

(β') $aRb \Leftrightarrow a < b$ στο σύνολο \mathbf{R} .

(γ') $aRb \Leftrightarrow a + b \in \mathbf{Z}$ στο σύνολο \mathbf{R} .

ΕΚ, 10-10-2014